Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Matemáticas discretas

Viernes 18 de noviembre de 2016 (mañana)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[60 puntos]**.

8816 – 7227

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 17]

En esta pregunta la notación $(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_b$ se utiliza para representar un número en base b, y cuya cifra de las unidades es a_0. Por ejemplo $(2234)_5$ representa $2 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 3 \times 5 + 4 = 319$ y la cifra de las unidades es 4.

(a) Sea x la raíz cúbica del número en base 7 $(503231)_7$.

(i) Convirtiendo este número en base 7 a número en base 10, halle el valor de x en base 10.

(ii) Exprese x como un número en base 5. [7]

(b) Sea y el número en base 9 $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_9$. Muestre que y es exactamente divisible entre 8 si y solo si la suma de sus cifras $\sum_{i=0}^{n} a_i$ también es exactamente divisible entre 8. [7]

(c) Utilizando el método del apartado (b), halle la cifra de las unidades cuando el número en base 9 $(321321321)_9$ se escribe como número en base 8. [3]

2. [Puntuación máxima: 8]

En esta pregunta no es necesario dibujar ningún grafo. Utilice el lema del apretón de manos y otros resultados relativos a los grafos para explicar por qué,

(a) un grafo no puede existir con esta secuencia de grados $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; [2]

(b) un grafo simple, conexo y planario no puede existir con esta secuencia de grados $4, 4, 4, 4, 5, 5$; [3]

(c) un árbol no puede existir con esta secuencia de grados $1, 1, 2, 2, 3, 3$. [3]

3. [Puntuación máxima: 16]

En un juego de computador, el dragón mágico Fibi está subiendo por unas escaleras muy largas. Los escalones están rotulados con los números $0, 1, 2, 3 \ldots$; el juego empieza en el escalón 0. Cuando Fibi está en un escalón determinado tiene dos opciones: subir saltando un escalón o subir volando dos escalones. Sea u_n el número de formas distintas que tiene Fibi de llegar hasta el escalón n. A la hora de calcular el número de formas distintas, tenga en cuenta que el orden en el que Fibi realiza los movimientos sí que importa; por ejemplo, saltar, volar, saltar se considera que es distinto de saltar, saltar, volar. Sea $u_0 = 1$.

(a) Halle los valores de u_1, u_2, u_3. [3]

(b) Muestre que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. [2]

(c) (i) Escriba la ecuación auxiliar para esta relación de recurrencia.

(ii) A partir de lo anterior, halle la solución de esta relación de recurrencia y exprese la respuesta en la forma $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$, donde α y β se han de determinar de manera exacta en forma de radical irracional y $\alpha > \beta$. El valor de las constantes A y B no tiene que hallarse en este apartado. [5]

(d) (i) Sabiendo que $A = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, utilice el valor de u_0 para determinar B.

(ii) A partir de lo anterior, halle la fórmula explícita para u_n. [3]

(e) Halle el valor de u_{20}. [1]

(f) Halle el valor más pequeño de n para el cual se cumple que $u_n > 100\,000$. [2]

4. [Puntuación máxima: 19]

El grafo simple y completo $\kappa_n (n > 2)$ tiene por vértices $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. El peso de la arista que va de A_i to A_j viene dado por el número $i + j$.

(a) (i) Dibuje con precisión el grafo κ_4 incluyendo el peso de todas las aristas.

(ii) Utilice el algoritmo del vecino más próximo, empezando en el vértice A_1, para hallar un ciclo hamiltoniano.

(iii) A partir de lo anterior, halle un límite superior para el problema del «viajante» en este grafo ponderado. [4]

(b) Considere el grafo κ_5. Utilice el algoritmo del vértice borrado, siendo A_5 el vértice borrado, para hallar un límite inferior para el problema del «viajante» en este grafo ponderado. [5]

Considere el grafo general κ_n.

(c) (i) Utilice el algoritmo del vecino más próximo, empezando en el vértice A_1, para hallar un ciclo hamiltoniano.

(ii) A partir de lo anterior, halle y simplifique una expresión en función de n, que represente un límite superior para el problema del «viajante» en este grafo ponderado. [7]

(d) Dividiendo el peso de la arista A_iA_j en dos partes o de cualquier otro modo alternativo, muestre que todos los ciclos hamiltonianos que hay en κ_n tienen el mismo peso total y que ese peso es igual a la respuesta obtenida en (c)(ii). [3]